Université de Lorraine – Metz, UFR MIM
Licence de Mathématiques, 2013-2014
Analyse numérique non linéaire

TD 1

1- Equation de la logistique
On considère l'e.d.o.

$$\begin{cases} y'(t) = y(1-y) \\ y(0) = 1/10 \end{cases} \tag{1}$$

appelée équation de la logistique.
1) Ecrire un programme matlab pour l'approximation de (1) sur un intervalle $[0, T]$, par la méthode d'Euler explicite. On note `dt` le pas de temps. Réaliser plusieurs simulations avec ce code pour `dt=1`, `dt=0.1`, `dt=0.01`,... sur $t \in [0, 10]$.
2) Ecrire un second programme pour le schémas RK2 appliqué a (1).
3) Calculer la solution exacte de (1) ainsi que les solutions approchées par chacun des deux schémas.

2- Etude quantitative de l'erreur du schéma d'Euler
Soit $y(t)$ la solution du problème

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2+y^2}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que $y(t)$ existe au moins sur $t \in [0, 1]$ et que dans cet intervalle de temps, $-1 \leq y(t) \leq 1$.
2) On prend pour pas de temps $\Delta t = 1/N$. Calculer numériquement la solution approchée de (2) par le schéma d'Euler explicite.
3) Déterminer N assez grand pour que la solution approchée ait une erreur $e_n = y^k - y(n\Delta t)$ tel que

$$|e_n| \leq 10^{-4} \tag{3}$$

3- Comparaison du schéma d'Euler explicite et schéma RK2

On considère les deux e.d.o suivantes (4) and (5) dont les solutions exactes sont données entre parenthèses.

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t - y \\ y(0) = 0 \quad ; \quad (y(t) = t) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y'(t) = -1 + 2t + \frac{y^2}{(1+t^2)^2} \\ y(0) = 2 \quad ; \quad (y(t) = 1 + t^2) \end{cases} \tag{5}$$

1) Vérifier dans chacun des deux cas que la fonction proposée est l'unique solution du problème.
2) Ecrire un programme `matlab` qui intègre le problème avec le schéma d'Euler explicite. On donnera la solution calculée au temps $t = 1$, avec $N = 10$ pas de temps puis $N = 20, 40, 80$ pas de temps. Comparer avec la solution exacte dans chaque cas.
3) Déduire le taux de convergence mesuré du schéma d'Euler explicite dans chacun des deux cas.
4) Effectuer le même travail avec le schéma RK2.

4- Calcul d'erreur pour le θ-schéma
1) Vérifier que $y(t) = e^{-t}\sin(2t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} y'(t) = -y + 2e^{-t}\cos(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

2) Programmer le θ schéma pour cette équation
3) Représenter les courbes $t^n = n\Delta t \mapsto \ln|y(t^n) - y^n|$, où y^n est la solution obtenue par le θ schéma.

5- Etude du θ-schéma
On considère l'équation différentielle pour $x(t) \in \mathbb{R}$:

$$x'(t) \;=\; f(x(t),t)\;, \quad t \in [0,T]\;, \quad x(0) = x_0,\; x(t) \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné. On suppose que $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'elle vérifie la condition suivante:

$$(L) \quad \text{Il existe } L > 0 \text{ tel que } \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \;\leq\; L\;, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}, \quad \forall\, t \in [0,T]\;. \tag{8}$$

On considère une subdivision uniforme à $N+1$ points (donc de pas $h = T/N$) de l'intervalle $[0,T]$.
Pour $\theta \in [0,1]$ on considère le θ-schéma:

$$(M_\theta) \begin{cases} x_0 \;\in\; \mathbb{R} \text{ donné}\;, \quad t_n = nh\;, \quad 0 \leq n \leq N\;, \\ x_{n+1} \;=\; x_n + h\theta f(x_{n+1}, t_{n+1}) + h(1-\theta) f(x_n, t_n), \quad 0 \leq n \leq N-1\;. \end{cases} \tag{9}$$

où $t_n = nh, n \geq 0$.
1) On considère la fonction

$$f(x,t) = \frac{xt}{1+t^2}. \tag{10}$$

Cette fonction vérifie-t-elle l'hypothèse *(L)* ?
2) Dans le cas où la fonction $f(x,t)$ est donnée par (10), exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. (On supposera h suffisamment petit).
3) On considère le cas général. Montrer qu'il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < h < h_0$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifiant (M_θ). Indiquer une façon dévaluer numériquement x_{n+1} en fonction de x_n.
4) Soit $x(t)$ la solution du problème (7). Pour tout $t \in [0, T-h]$, $0 < h < h_0$, on introduit l'erreur locale de troncature associée au schéma (M_θ)

$$e(h,t) \;=\; \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \theta f(x(t+h), t+h) - (1-\theta) f(x(t),t). \tag{11}$$

Déterminer selon les valeurs de θ l'ordre du schéma implicite (M_θ).
5) Soit $(z_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ une suite fixée. On considère la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ donnée, pour tout $0 < h < h_0$, par

$$\begin{cases} y_0 \;\in\; \mathbb{R} \text{ donné}\;, \quad 0 \leq n \leq N\;, \\ y_{n+1} \;=\; y_n + h\theta f(y_{n+1}, t_{n+1}) + h(1-\theta) f(y_n, t_n) + z_n, \\ \qquad\qquad 0 \leq n \leq N-1\;, \end{cases} \tag{12}$$

Vérifier que $(y_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est bien définie.
6) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive vérifiant

$$u_{n+1} \leq \alpha u_n + \beta, \quad \alpha, \beta \geq 0, \alpha \neq 1. \tag{13}$$

Montrer que

$$0 \leq u_n \;\leq u_0 \alpha^n + \beta \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}. \tag{14}$$

7) Estimer $|y_n - x_n|$ en fonction de $|y_0 - x_0|$ et de $(|z_n|)_{0 \leq n \leq N-1}$.
8) Donner un majorant de l'erreur

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |x_n - x(t_n)| \tag{15}$$

en fonction de h et $|x_0 - x^0|$.
9) On suppose que $x_0 = x^0$, Quel est l'ordre de l'erreur

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |x_n - x(t_n)|? \tag{16}$$